Модель системы с двумя стационарами

химическая схема

1) $2A \longrightarrow 3A$

2) $A \longrightarrow$

3) $\longrightarrow A$

ОДУ

$$\frac{\partial}{\partial t} a = k_1\, a^2 - k_2\, a + k_3$$

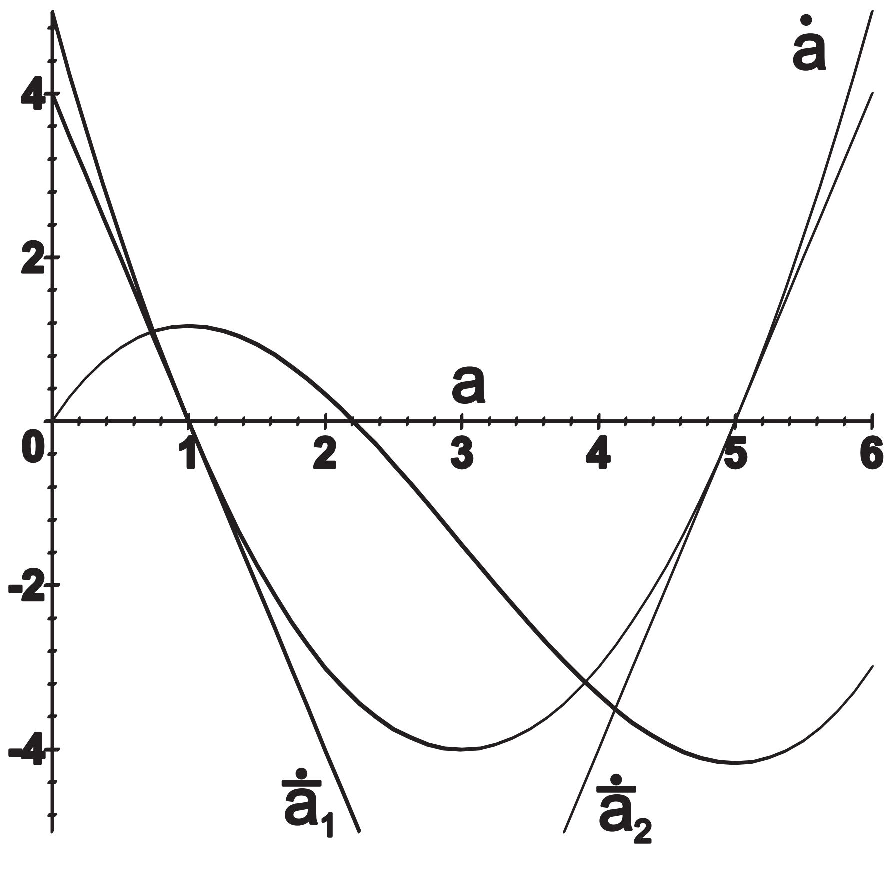
стационары $$\overline{a} = \frac{1}{2}\,\frac{k_2 \pm \sqrt{k_2^{\,2} - 4\,k_1\,k_3}}{k_1}$$

производная

$$2\,k_1\,a - k_2$$

производная в точке стационара

$$\pm\sqrt{k_2^{\,2} - 4\,k_1\,k_3}$$



характеристическое уравнение $\pm\sqrt{k_2^{\,2} - 4\,k_1\,k_3} + \lambda$

корни характеристического уравнения $\pm\sqrt{k_2^{\,2} - 4\,k_1\,k_3}$

Модель Брюсселятор

химическая схема

1) $A \longrightarrow X$
2) $B+X \longrightarrow Y+D$
3) $2X+Y \longrightarrow 3X$
4) $X \longrightarrow E$

система ОДУ

$$\frac{\partial}{\partial t} x = k_1 - k_2\, x + k_3\, x^2\, y - k_4\, x$$

$$\frac{\partial}{\partial t} y = k_2\, x - k_3\, x^2\, y$$

стационар

$$\bar{x} = \frac{k_1}{k_4} \qquad \bar{y} = \frac{k_4\, k_2}{k_1\, k_3}$$

якобиан

$$\begin{bmatrix} -k_2 + 2\, k_3\, x\, y - k_4 & k_3\, x^2 \\ k_2 - 2\, k_3\, x\, y & -k_3\, x^2 \end{bmatrix}$$

якобиан в точке стационара

$$\begin{bmatrix} k_2 - k_4 & \dfrac{k_3\, k_1^2}{k_4^2} \\ -k_2 & -\dfrac{k_3\, k_1^2}{k_4^2} \end{bmatrix}$$

характеристическое уравнение

$$Det \begin{bmatrix} k_2 - k_4 - \lambda & \dfrac{k_3\, k_1^2}{k_4^2} \\ -k_2 & -\dfrac{k_3\, k_1^2}{k_4^2} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{(-k_2\, k_4^2 + k_4^3 + k_3\, k_1^2)\, \lambda}{k_4^2} + \frac{k_3\, k_1^2}{k_4} = 0$$

корни характеристического уравнения

$$\lambda = \frac{1}{2}\, \frac{k_2\, k_4^2 - k_4^3 - k_3\, k_1^2 \pm \sqrt{k_2^2\, k_4^4 - 2\, k_2\, k_4^5 - 2\, k_2\, k_4^2\, k_3\, k_1^2 + k_4^6 - 2\, k_4^3\, k_3\, k_1^2 + k_3^2\, k_1^4}}{k_4^2}$$

Модель Лотка-Вольтерра

схема

1) A $\longrightarrow$ 2A
2) A+B $\longrightarrow$ 2B
3) B $\longrightarrow$

система ОДУ

$$\frac{\partial}{\partial t} a = k_1\, a - k_2\, a\, b$$

$$\frac{\partial}{\partial t} b = k_2\, a\, b - k_3\, b$$

стационары

$$\{\, \overline{a} = 0,\ \overline{b} = 0 \,\},$$

$$\{\, \overline{a} = \frac{k_3}{k_2},\ \overline{b} = \frac{k_1}{k_2} \,\}$$

якобиан

$$\begin{bmatrix} k_1 - k_2\, b & -k_2\, a \\ k_2\, b & k_2\, a - k_3 \end{bmatrix}$$

якобиан в точке стационара

$$\begin{bmatrix} 0 & -k_3 \\ k_1 & 0 \end{bmatrix}$$

характеристическое уравнение

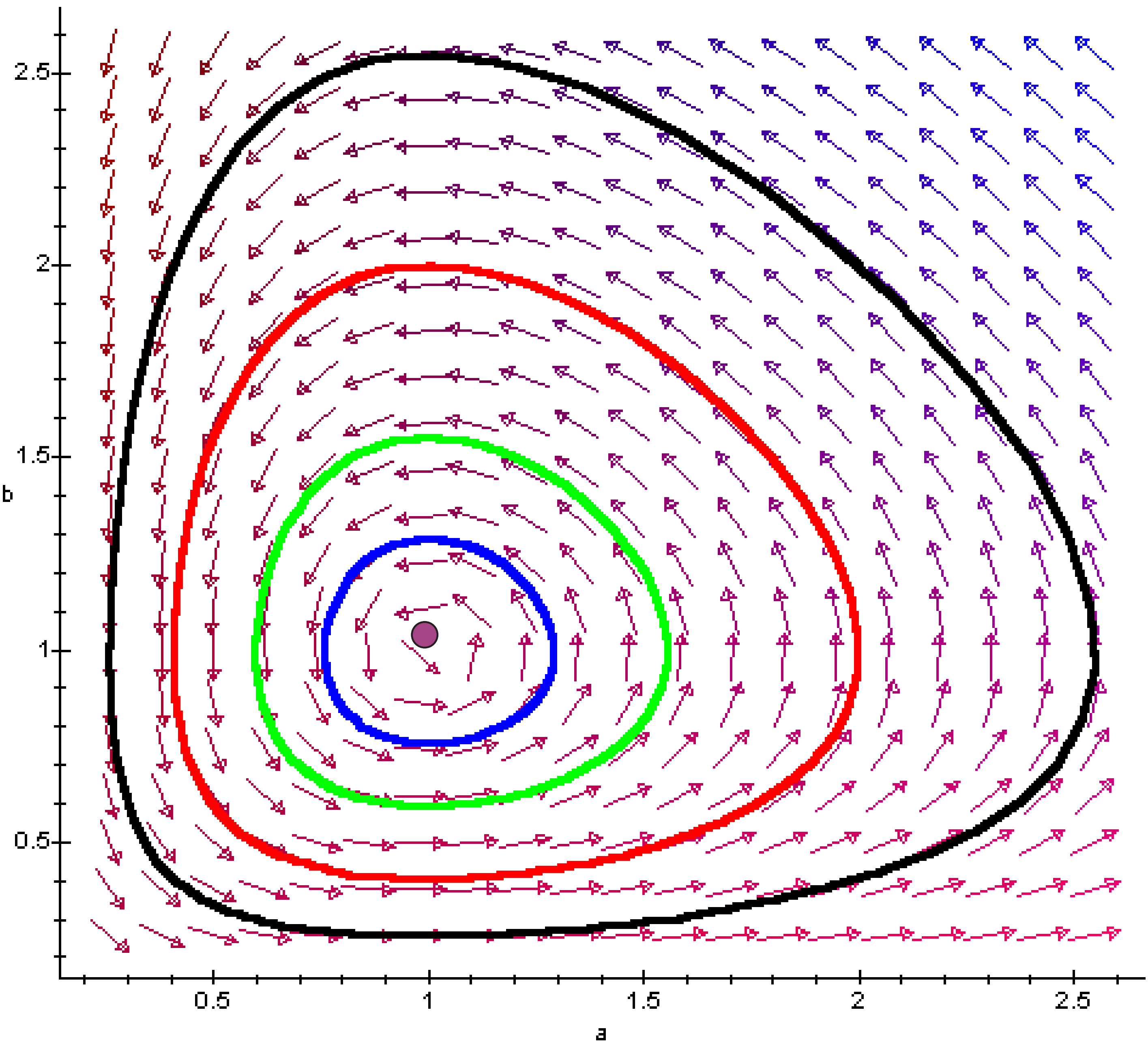
$$Det \begin{bmatrix} -\lambda & -k_3 \\ k_1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + k_3\, k_1 = 0$$

корни характеристического уравнения

$$\lambda = \pm\sqrt{-k_3\, k_1}$$

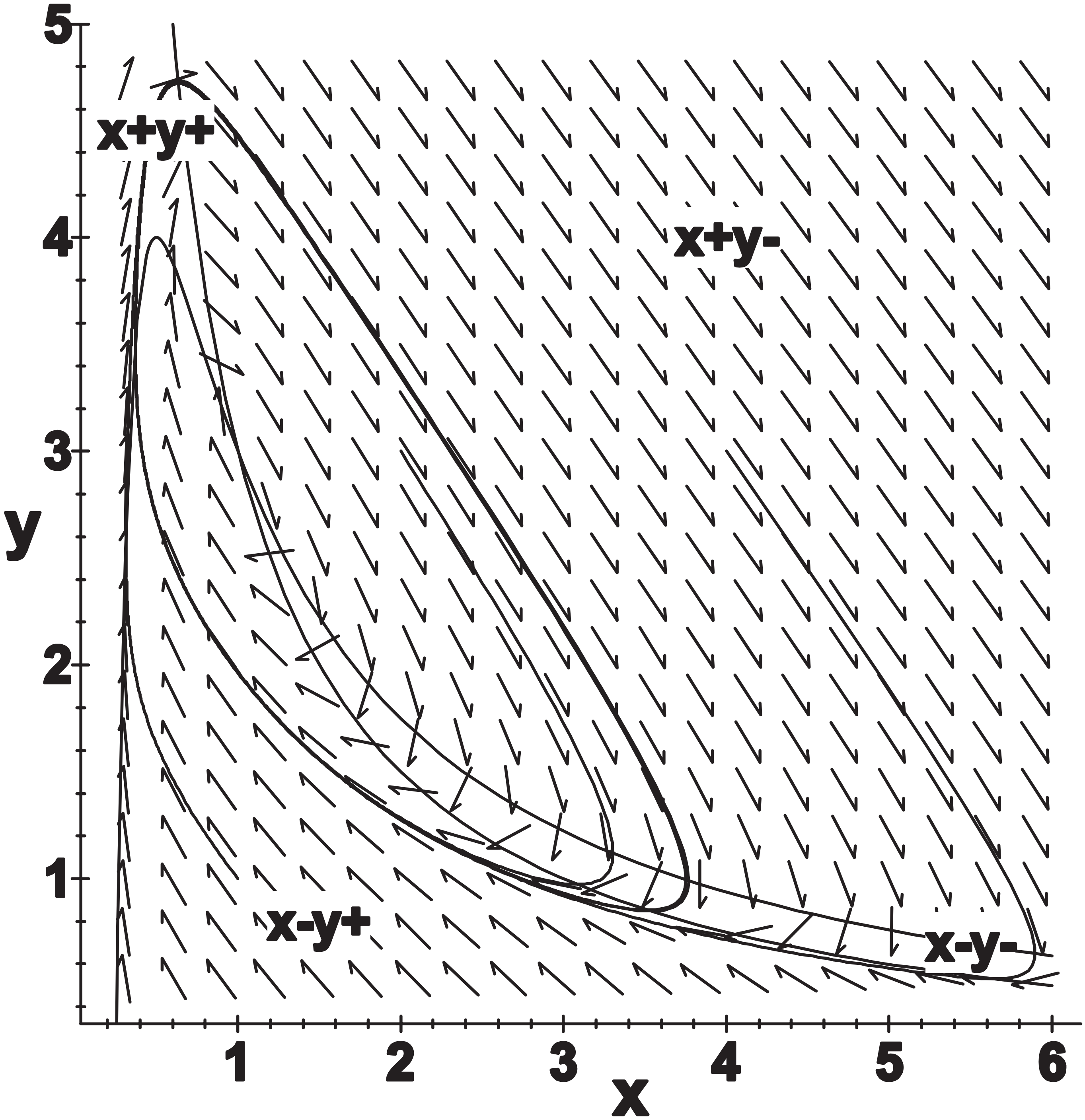
Поле направлений в модели Лотка-Вольтерра

k=[1;1;1] $\bar{x}=1;\ \bar{y}=1$ $\lambda=\pm i$



Поле направлений в модели Брюсселятор

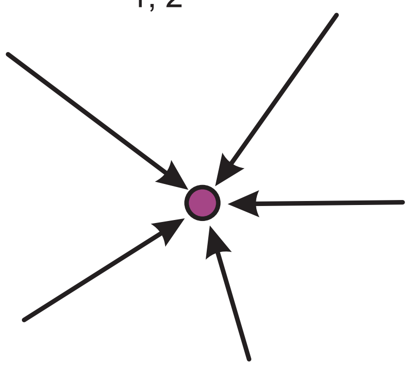
k=[1;3;1;1] $\bar{x}$=1; $\bar{y}$=3 λ=0.5±0.866i



Типы стационарных точек на плоскости

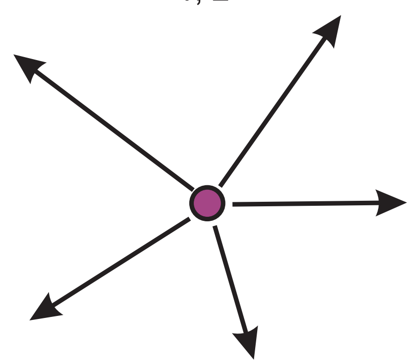
устойчивый узел

$\lambda_{1,2}<0$



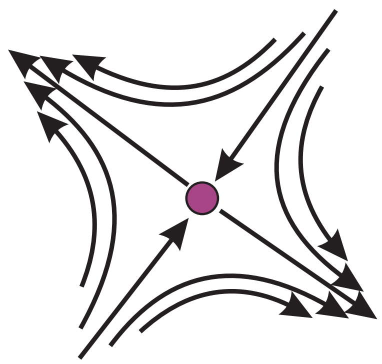
неустойчивый узел

$\lambda_{1,2}>0$



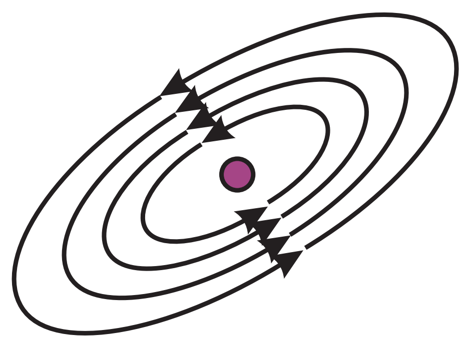
седло

$\lambda_1<0;\ \lambda_2>0$



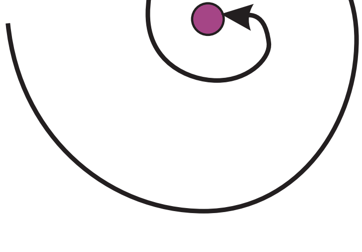
центр

$Re(\lambda_{1,2})=0\ Im(\lambda_{1,2})=\pm bi$



устойчивый фокус

$Re(\lambda_{1,2})<0\ Im(\lambda_{1,2})=\pm bi$



неустойчивый фокус

$Re(\lambda_{1,2})>0\ Im(\lambda_{1,2})=\pm bi$